



Rapport concernant la possibilité d'utiliser le MTBO théorique dans la procédure de qualification des équipements ILS

Véronique Font, Bernard Garel, Ludovic d'Estampes, Guillaume Saint Pierre

► To cite this version:

Véronique Font, Bernard Garel, Ludovic d'Estampes, Guillaume Saint Pierre. Rapport concernant la possibilité d'utiliser le MTBO théorique dans la procédure de qualification des équipements ILS. [Rapport Technique] IXI/SDO/00/P093/N1, IXI. 2001. hal-01330115

HAL Id: hal-01330115

<https://hal.science/hal-01330115>

Submitted on 13 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Rapport concernant la possibilité d'utiliser le MTBO théorique dans la procédure de qualification des équipements ILS

Véronique FONT, Bernard GAREL,
Ludovic d'ESTAMPES, Guillaume SAINT PIERRE

Ref. : IXI/SDO/00/P093/N1 - Rev. : 0 - Date : 18/01/2001

1 Introduction

1.1 Contexte et objectifs

La société STNA participe à la certification des équipements utilisés pour la navigation aérienne. Dans ce cadre la division 3R s'intéresse aux équipements ILS. Ces équipements, situés au sol, sont utilisés lors de l'atterrissage. Leur objectif de fiabilité est fonction de la catégorie de l'équipement. Cet objectif est caractérisé par une valeur de MTBO, appelée MTBO objectif. Cette valeur est déduite de l'étude par arbre de défaillance du système complet.

La démonstration de l'atteinte de cet objectif est réalisée à l'aide de tests séquentiels dont la durée doit au moins être supérieure à 1 an (pour prendre en compte les différents environnements d'exploitation). Ces tests sont décrits dans la norme MIL-HDBK-781.

La mise en oeuvre de cette démarche demande un temps de test jugé excessif (plus de 2 ans), aussi des études ont été menées pour tenter de réduire cette durée de test. La piste explorée jusqu'à présent consiste à augmenter le niveau du risque du consommateur. Le STNA souhaite dans un premier temps étudier cette piste en faisant apparaître toutes les hypothèses sous-jacentes, puis dans un second temps regarder si d'autres pistes sont possibles.

1.2 Glossaire

ILS : Instrument Landing System,
MTBO : Mean Time Between Outages
MTBF : Mean Time Between Failures

1.3 Notations

$P(A/B)$: probabilité d'avoir A sachant que l'on a B, avec A et B deux événements

$P_{\theta}(B)$: probabilité d'avoir B lorsque la valeur du paramètre est égale à θ

$E_{\theta}(X)$: espérance mathématique de la variable aléatoire X lorsque la valeur du paramètre est égale à θ

ν : la variable aléatoire temps d'arrêt, c'est à dire le temps nécessaire pour prendre une décision.

1.4 Documents de référence

1. **MIL-HDBK-781A** : Handbook for reliability test methods, plans, and environments for engineering, development, qualification, and production. 1 Apr 1996. Department of Defense (USA).
2. **ILS Certification Requirements**, Final report, DERA/WSS/WX1/CR980799/2.3, January 2000, M. Powe and S. Harding.
3. **Sequential Analysis** : Wald A., 1947, John Wiley & Sons, New York

4. **Sequential Life Tests in Exponential Case**, Epstein B. and Sobel M., 1955, Annals of Mathematical Statistics, Volume 26, pp 82-93
5. **Common European Guidance Materiel on Certification of ILS and MLS Ground System** (first draft).
6. **Sequential Analysis : tests and confidence intervals**, D. Siegmund, 1985, Springer-Verlag.
7. **All weather operations group (AWOG) co-ordination meeting**, report of the project team on certification, 26th-27th October 2000
8. **Probabilités et statistiques, 2. Problèmes à temps mobiles**, D. Dacunha-Castelle, M. Duflo, Masson, 1983
9. **Sequential Tests of Statistical Hypotheses**, B.K. Ghosh, Addison-Wesley publishing company, 1970

1.5 Présentation du rapport

Ce document présente les premières réflexions menées sur le thème de la possibilité de faire intervenir le MTBO théorique dans l'évaluation du MTBO des équipements ILS.

Le MTBO théorique est le MTBO obtenu à l'issue de la conception de l'équipement. Cette valeur est établie par le concepteur de l'équipement à l'aide d'études de sûreté de fonctionnement prenant en compte les différents composants de l'ILS et son architecture.

Ce rapport est composé de six parties.

Cette introduction constitue la première partie.

La deuxième partie détaille quelques définitions.

La troisième partie explicite la relation existant entre le risque producteur et le risque consommateur dans le cadre des tests statistiques classiques.

La quatrième partie concerne les tests séquentiels. Les principes et les principaux résultats sont présentés.

La cinquième partie présente les démonstrations associées aux principales caractéristiques des tests séquentiels décrits dans la quatrième partie.

La sixième partie précise les caractéristiques des tests séquentiels dans le cadre du MTBO.

La septième et dernière partie met en évidence une piste d'amélioration du temps de tests.

L'annexe présente les échanges de courrier électronique.

2 Définitions

Quand on cherche à choisir entre une hypothèse $H_0(\theta = \theta_0)$ et une hypothèse $H_1(\theta = \theta_1)$, on choisit une statistique, c'est-à-dire une variable aléatoire dont on connaît la loi au moins lorsque l'hypothèse H_0 est vraie. On compare ensuite sa valeur observée à une valeur théorique (déterminée à

partir de sa loi). Cette comparaison permet de décider quelle hypothèse peut être considérée comme vraie, avec quel risque d'erreur.

On considère 2 types d'erreurs :

- accepter l'hypothèse H_1 alors que c'est l'hypothèse H_0 qui est vraie,
- accepter l'hypothèse H_0 alors que c'est l'hypothèse H_1 qui est vraie.

	Réalité	
Choix	H_0	H_1
H_0	$1 - \alpha$	β
H_1	α	$1 - \beta$

Le **niveau de confiance** du test est égal à $1 - \alpha$

La **puissance** du test est : $1 - \beta$.

La probabilité α est appelée **risque du producteur** (ou risque de première espèce) car la valeur α correspond à la probabilité de choisir H_1 alors que H_0 est vraie, ou autrement dit, à la probabilité de rejeter H_0 alors que H_0 est vraie. Cela correspond pour le producteur de l'équipement à la probabilité que son équipement soit considéré comme non conforme alors que celui-ci est conforme.

La probabilité β est appelée **risque du consommateur** (ou risque de deuxième espèce) car la valeur β correspond à la probabilité de choisir H_0 alors que H_1 est vraie, ou autrement dit, à la probabilité de ne pas rejeter H_0 alors que H_0 est fautive. Cela correspond pour le consommateur à la probabilité qu'il considère l'équipement conforme alors que celui-ci n'est pas conforme.

3 Tests classiques

Dans les tests classiques (non séquentiels) utilisés en statistique, on observe un phénomène et on cherche à partir de cette observation à prendre une décision. Le nombre d'observations est donc un nombre fixé : n . Suivant le type de phénomène observé on sélectionne une statistique dont on connaît la loi. Soit $\gamma(n, \lambda)$ cette statistique. Elle est une fonction du nombre d'observations n et d'un paramètre λ .

On cherche à tester $H_0 : \lambda = \lambda_0$ contre $H_1 : \lambda = \lambda_1$.

On se fixe la valeur de α (risque du producteur), on en déduit la valeur du seuil k permettant de décider, puis de la valeur de k on déduit la valeur de β

$$\begin{aligned} P(\gamma(n, \lambda_0) \geq k) &= \alpha \\ P(\gamma(n, \lambda_1) < k) &= \beta. \end{aligned}$$

Il existe donc, dans le cadre des tests classiques, une relation entre la valeur du risque de première espèce α et la valeur du risque de deuxième espèce β .

4 Les tests séquentiels : Généralités

4.1 Cadre de travail.

Le cadre de départ est le même que celui développé pour les tests classiques, c'est-à-dire que l'on cherche à décider entre 2 hypothèses :

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ contre } H_1 : \theta = \theta_1.$$

On souhaite donc faire un test pour choisir laquelle de ces deux valeurs, θ_0 ou θ_1 , (toutes deux fixées par l'expérimentateur) est la plus plausible. La théorie des tests séquentiels s'applique pour θ_0 et θ_1 quelconques (fixés) (dans les applications au MTBO, nous introduirons une relation du type $d \times \theta_0 = \theta_1$).

L'apport des tests séquentiels par rapport à la théorie classique consiste essentiellement en une volonté de réduire les coûts et donc les délais d'expérimentations. En effet, on peut montrer que la taille des échantillons nécessaires pour prendre une décision dans un cadre séquentiel est nettement inférieure à celle requise par la théorie classique (pour des équipements identiques). L'approche séquentielle s'impose donc naturellement dans le cadre des essais sur l'I.L.S. (Instrument Landing System) étant donné leur prix et leur effectif restreint.

4.2 Approche générale de la théorie des tests séquentiels.

Avant de situer le problème dans un cadre plus concret, nous allons aborder brièvement les justifications théoriques que l'on peut obtenir dans les cas généraux.

On dispose d'un échantillon x_1, \dots, x_n iid (indépendantes identiquement distribuées) de taille n fixée représentant les données. Cet échantillon correspond à n observations indépendantes d'une même variable aléatoire. Le cas particulier des données liées aux I.L.S. sera analysé dans la section 6 dédiée aux applications. On suppose que chaque x_i est l'observation d'une variable aléatoire de densité

$$f(x, \theta),$$

dépendant d'un paramètre θ . On cherche à tester

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ contre } H_1 : \theta = \theta_1.$$

Dans la théorie classique, le Lemme de Neyman Pearson nous permet de proposer la règle de décision suivante : On choisit l'hypothèse H_1 si

$$L_n = \prod_{i=1}^n \frac{f(x_i, \theta_1)}{f(x_i, \theta_0)} \geq K_\alpha,$$

où K_α est obtenu à partir du niveau α que l'on se fixe pour le test. On pose :

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\text{accepter } H_1/\theta = \theta_0) \\ &= P_{\theta_0}(L_n \geq K_\alpha) \\ &= \text{Risque de première espèce} \\ &= \text{Risque du producteur.}\end{aligned}$$

Celle ci dépend donc de α , de la taille n de l'échantillon et de θ_0 .
On définit de même :

$$\begin{aligned}\beta &= P(\text{accepter } H_0/\theta = \theta_1) \\ &= P_{\theta_1}(L_n < K_\alpha) \\ &= \text{Risque de deuxième espèce} \\ &= \text{Risque du consommateur.}\end{aligned}$$

La puissance d'un test est alors définie par

$$\begin{aligned}1 - \beta &= P(\text{accepter } H_1/\theta = \theta_1) \\ &= P_{\theta_1}(L_n \geq K_\alpha)\end{aligned}$$

Celle ci dépend donc de α , de la taille n de l'échantillon et de θ_1 .

Dans le cadre des tests classiques, une fois la taille de l'échantillon fixée, il est nécessaire de se fixer α , les valeurs de K_α et de β sont déduites de ces valeurs.

Dans le cadre des tests séquentiels, la taille de l'échantillon n'est pas fixé, et il est nécessaire de se fixer les deux niveaux α et β auxquels on souhaite placer notre test.

4.2.1 Tests séquentiels non tronqués

La taille de l'échantillon n'est plus fixée dans le cadre séquentiel, on rajoute des données x_i une par une, et à chaque nouvelle donnée, on se demande si on peut répondre à la question «accepter ou non H_0 » ou si on a besoin d'observations supplémentaires.

L'équivalent séquentiel de la règle de décision précédente est le Théorème de Wald qui nous indique de poursuivre la collecte de données tant que :

$$B \leq L_n = \prod_{i=1}^n \frac{f(x_i, \theta_1)}{f(x_i, \theta_0)} \leq A.$$

On stoppe la procédure en choisissant H_0 dès que $L_n \leq B$ ou H_1 dès que $A \leq L_n$.

Cette règle de décision s'appelle le test séquentiel du rapport des probabilités (TSRP). Les constantes A et B sont déterminées à partir de α et β .

Ce sont des fonctions dont on peut montrer que (cf démonstrations section suivante) :

$$\begin{aligned} A(\alpha, \beta) &\leq \frac{1 - \beta}{\alpha} \\ B(\alpha, \beta) &\geq \frac{\beta}{1 - \alpha}. \end{aligned}$$

En pratique on utilisera :

$$A = \frac{1 - \beta}{\alpha} \quad \text{et} \quad B = \frac{\beta}{1 - \alpha}.$$

Cela nous conduit à prendre des sécurités plus grandes que les valeurs nominales (c'est-à-dire des erreurs de première et deuxième espèce resp. plus petite et plus grande que α et β) puisque $A \geq A(\alpha, \beta)$ et $B \leq B(\alpha, \beta)$, et donc des échantillons légèrement plus grands. Cependant on peut montrer, (Wald) que cette erreur est négligeable.

Deux fonctions s'avèrent utiles afin de vérifier la qualité d'un test séquentiel : la **fonction d'efficacité** et la **fonction ASN** (Average Sample Number).

On appelle **fonction d'efficacité** la probabilité que l'on note $P(\theta/\alpha, \beta, \theta_0, \theta_1)$ de choisir l'hypothèse H_0 lorsque θ varie.

On montre plus loin que l'on peut l'approximer par :

$$L(\theta) = P(\theta/\alpha, \beta, \theta_0, \theta_1) \simeq \frac{A^{h(\theta)} - 1}{A^{h(\theta)} - B^{h(\theta)}},$$

où $h(\theta)$ est la solution de :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_0)} \right]^{h(\theta)} f(x, \theta) dx = 1.$$

C'est une fonction de la valeur du paramètre θ . Dans le cadre du MTBO, le paramètre θ est exprimé en fonction de θ_1 (cad $\theta = k \times \theta_1$). Elle est représentée dans le rapport DERA ainsi que dans MIL-HDBK-781A sous le nom «**MTBO_{true} versus probability of acceptance**».

On remarquera que $L(\theta_0) = 1 - \alpha = P_{\theta_0}(\text{accepter } H_0)$ et que $L(\theta_1) = \beta = P_{\theta_1}(\text{accepter } H_0)$.

Dans un test séquentiel, on doit se fixer : α, β, θ_0 et θ_1 . Par contre la taille N de l'échantillon au moment de la décision est aléatoire. Afin d'évaluer la qualité et l'intérêt des tests séquentiels, on sera amené à évaluer la valeur moyenne de cette taille, c'est ce que l'on appelle la **fonction ASN**. On montrera plus loin que :

$$E_{\theta}(N) \simeq \frac{L(\theta) \log B + (1 - L(\theta)) \log A}{E_{\theta}(Z_1)}$$

avec

$$E_{\theta}(Z_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_0)} \right] f(x, \theta) dx.$$

La fonction ASN est donc aussi une fonction de θ qui est représentée dans le rapport DERA ainsi que dans MIL-HDBK-781A sous le nom «**MTBO_{true} versus expected test time**».

4.2.2 Tests séquentiels tronqués

Lorsque le nombre maximal d'expériences que l'on peut effectuer est limité, pour des raisons économiques par exemple, on utilise alors les tests tronqués, c'est-à-dire que l'on s'impose de prendre une décision avant d'atteindre une certaine taille d'échantillon. Nous verrons dans la partie application au MTBO (section 6), comment on détermine ces bornes dans ce cas.

Les tests utilisés dans le cadre du rapport DERA et de MIL-HDBK-781A sont des tests séquentiels tronqués. Cette troncature ayant une influence sur les risques du producteur et du consommateur, il faut modifier la constante A afin de réduire cet effet. On prend (DERA page 26) :

$$A = \frac{(1 - \beta)(d + 1)}{2\alpha d} \quad \text{et} \quad B = \frac{\beta}{1 - \alpha}$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha & : \text{risque du producteur} \\ \beta & : \text{risque du consommateur} \\ d & : \text{rapport entre } \theta_0 \text{ et } \theta_1 \quad \left(d = \frac{\theta_0}{\theta_1} \right). \end{aligned}$$

Cela nous permet alors d'appliquer la procédure des tests séquentiels classiques sans tenir compte de l'influence de la troncature sur les différents risques.

5 Démonstrations mathématiques

5.1 Equivalence entre les 2 modélisations

Soit X_i la variable aléatoire qui représente le temps entre chaque outage, on a $f_{X_i}(x_i; \theta) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{1}{\theta}x_i\right)$. On a le test séquentiel Φ suivant :

$$\begin{aligned} \text{on continue de tester} & \iff B < \frac{L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1)}{L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_0)} < A \\ & \iff B < \prod_{i=1}^n \frac{f_{X_i}(x_i; \theta_1)}{f_{X_i}(x_i; \theta_0)} < A \\ & \iff B < \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n \exp\left[-\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right) \sum_{i=1}^n x_i\right] < A \end{aligned}$$

Soit R_t le nombre d'outages à t , on a $P(R_t = r) = \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right) \cdot \frac{\left(\frac{t}{\theta}\right)^r}{r!}$. On a le test séquentiel suivant :

$$\text{on continue de tester} \iff B < \frac{L(r; \theta_1)}{L(r; \theta_0)} < A$$

$$\iff B < \frac{\exp\left(-\frac{t}{\theta_1}\right) \cdot \frac{\left(\frac{t}{\theta_1}\right)^r}{r!}}{\exp\left(-\frac{t}{\theta_0}\right) \cdot \frac{\left(\frac{t}{\theta_0}\right)^r}{r!}} < A$$

$$\iff B < \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^r \exp\left[-\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right) \cdot t\right] < A$$

Les 2 modélisations sont équivalentes lorsqu'on prend $n = r$ et $\sum_{i=1}^n x_i = t$. On notera le rapport des vraisemblances $L(\theta_0; \theta_1)$.

5.2 Approximation de A et de B

On a la règle de décision :

$$\text{on continue de tester} \iff B < L(\theta_0; \theta_1) < A,$$

$$\text{on arrête et on accepte } H_0 \iff L(\theta_0; \theta_1) \leq B,$$

$$\text{on arrête et on accepte } H_1 \iff A \leq L(\theta_0; \theta_1).$$

On pose $\alpha = P_{\theta_0}(\text{accepter } H_1)$ et $\beta = P_{\theta_1}(\text{accepter } H_0)$. On peut approcher A et B par

$$A = \frac{1 - \beta}{\alpha} \quad \text{et} \quad B = \frac{\beta}{1 - \alpha}.$$

5.2.1 Preuve de $A \leq \frac{1 - \beta}{\alpha}$, $B \geq \frac{\beta}{1 - \alpha}$

Si on accepte H_1 , on a

$$\begin{aligned} A \leq L(\theta_0; \theta_1) &\iff A \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i; \theta_0) \leq \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i; \theta_1) \\ &\iff A \int \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i; \theta_0) dx_1 \dots dx_n \leq \int \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i; \theta_1) dx_1 \dots dx_n \\ &\iff A\alpha \leq 1 - \beta \\ &\iff A \leq \frac{1 - \beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

De même, on a sous H_0 en acceptant H_0 :

$$\begin{aligned}
 L(\theta_0; \theta_1) \leq B & \iff \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i; \theta_1) \leq B \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i; \theta_0) \\
 & \iff \int_{H_0} \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i; \theta_1) dx_1 \dots dx_n \leq B \int_{H_0} \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i; \theta_0) dx_1 \dots dx_n \\
 & \iff \beta \leq B(1 - \alpha) \\
 & \iff \frac{\beta}{1 - \alpha} \leq B
 \end{aligned}$$

Pour la suite, on pose $A = \frac{1 - \beta}{\alpha}$, $B = \frac{\beta}{1 - \alpha}$, dans ce cas, on note :
 $\alpha' = P_{\theta_0}(\text{accepter } H_1)$ et $\beta' = P_{\theta_1}(\text{accepter } H_0)$.

5.2.2 Pour α et β petits, on a $\alpha' \simeq \alpha$ et $\beta' \simeq \beta$

Par l'approximation, on a

$$\alpha' \geq \alpha \quad \text{et} \quad \beta' \geq \beta \quad . \quad (1)$$

On applique de nouveau ce qui précède avec $A = \frac{1 - \beta}{\alpha}$ et $B = \frac{\beta}{1 - \alpha}$
 et α' et β' , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1 - \beta}{\alpha} \leq \frac{1 - \beta'}{\alpha'} \\ \frac{\beta'}{1 - \alpha'} \leq \frac{\beta}{1 - \alpha} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \alpha' \leq \frac{\alpha}{1 - \beta} (1 - \beta') \\ \beta' \leq \frac{\beta}{1 - \alpha} (1 - \alpha') \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \alpha' \leq \frac{\alpha}{1 - \beta} \\ \beta' \leq \frac{\beta}{1 - \alpha} \end{array} \right.$$

Or $\frac{1}{1 - \beta} \underset{0}{\sim} 1$ et $\frac{1}{1 - \alpha} \underset{0}{\sim} 1$, donc

$$\alpha' \leq \alpha \quad \text{et} \quad \beta' \leq \beta \quad (2)$$

d'après (1) et (2), on a $\alpha' \simeq \alpha$ et $\beta' \simeq \beta$.

5.3 Equation des droites

Relation aux limites entre le nombre d'outages observé (r) et le temps d'observation (t).

5.3.1 Droite inférieure

Elle vérifie :

$$\begin{aligned}
 B = L(\theta_0; \theta_1) &\iff B = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^r \exp \left[- \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0} \right) . t \right] \\
 &\iff \log(B) = r \log \frac{\theta_0}{\theta_1} - \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0} \right) . t \\
 &\iff r = \frac{\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0} \right)}{\log \frac{\theta_0}{\theta_1}} t + \frac{\log(B)}{\log \frac{\theta_0}{\theta_1}} \\
 &\iff r = a + bt.
 \end{aligned}$$

5.3.2 Droite supérieure

Elle vérifie :

$$\begin{aligned}
 A = L(\theta_0; \theta_1) &\iff r = \frac{\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0} \right)}{\log \frac{\theta_0}{\theta_1}} t + \frac{\log(A)}{\log \frac{\theta_0}{\theta_1}} \\
 &\iff r = c + bt.
 \end{aligned}$$

5.4 Fonction d'efficacité

$$L(\theta) = P_\theta(\text{accepter } H_0) \simeq \frac{A^{h(\theta)} - 1}{A^{h(\theta)} - B^{h(\theta)}}$$

$$\text{où } h(\theta) \text{ est la solution de } \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{f(x; \theta_1)}{f(x; \theta_0)} \right)^{h(\theta)} f(x; \theta) dx = 1.$$

Avant de continuer, montrons que $h(\theta)$ existe. Posons pour cela,

$$M(u) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{f(x; \theta_1)}{f(x; \theta_0)} \right)^u f(x; \theta) dx. \text{ On peut remarquer que}$$

$$M(u) = E_\theta [\exp(uZ_1)] \quad \text{où } Z_1 = \log \frac{f(X_1; \theta_1)}{f(X_1; \theta_0)}.$$

En fait, $M(u)$ est convexe. En effet, $M''(u) = E_\theta [Z_1^2 \exp(uZ_1)] > 0$.

Enfin, si $M'(0) = E_\theta (Z_1)$ est différent de zéro alors il existe un $u(\theta)$ (différent de zéro) tel que

$$M(u(\theta)) = 1.$$

Si on pose $f_*(x; \theta) = \left(\frac{f(x; \theta_1)}{f(x; \theta_0)} \right)^{h(\theta)} f(x; \theta)$, alors
 — f_* est une densité sur \mathbb{R} ,

— le test séquentiel Φ' : test de $H : f(x) = f(x; \theta)$ contre $H_* : f(x) = f_*(x; \theta)$ avec la règle de décision suivante :
continuer à tester si :

$$A^{h(\theta)} < \prod_{i=1}^n \frac{f_*(x_i; \theta)}{f(x_i; \theta)} < B^{h(\theta)},$$

$$\text{accepter } H \text{ si } A^{h(\theta)} > \prod_{i=1}^n \frac{f_*(x_i; \theta)}{f(x_i; \theta)},$$

$$\text{accepter } H_* \text{ si : } \prod_{i=1}^n \frac{f_*(x_i; \theta)}{f(x_i; \theta)} > B^{h(\theta)},$$

est équivalent au test séquentiel Φ qui précède. En effet, on continue de tester si

$$\begin{aligned} A^{h(\theta)} < \prod_{i=1}^n \frac{f_*(x_i; \theta)}{f(x_i; \theta)} < B^{h(\theta)} &\iff A^{h(\theta)} < \prod_{i=1}^n \left(\frac{f(x_i; \theta_1)}{f(x_i; \theta_0)} \right)^{h(\theta)} < B^{h(\theta)} \\ &\iff A < \prod_{i=1}^n \frac{f(x_i; \theta_1)}{f(x_i; \theta_0)} < B. \end{aligned}$$

Comme θ est fixé dans le test Φ' et que les deux tests sont équivalents, $P_H(\text{accepter } H) = P_\theta(\text{accepter } H_0)$ et donc $L(\theta) = 1 - P_H(\text{accepter } H_*)$.

$$\text{D'après les approximations de la section 4.2.1, on a } \begin{cases} A^{h(\theta)} \simeq \frac{1 - P_{H_*}(\text{accepter } H)}{P_H(\text{accepter } H_*)} \\ B^{h(\theta)} \simeq \frac{P_{H_*}(\text{accepter } H)}{1 - P_H(\text{accepter } H_*)} \end{cases}$$

ce qui entraîne

$$P_H(\text{accepter } H_*) \simeq \frac{1 - B^{h(\theta)}}{A^{h(\theta)} - B^{h(\theta)}}$$

$$L(\theta) \simeq \frac{A^{h(\theta)} - 1}{A^{h(\theta)} - B^{h(\theta)}}.$$

5.5 Fonction ASN

On veut montrer que

$$E_\theta(\nu) \simeq \frac{L(\theta) \log B + (1 - L(\theta)) \log A}{E_\theta(Z_1)}$$

où ν est le temps d'arrêt du test, Z_k définie par

$$Z_k = \log \frac{f(X_k; \theta_1)}{f(X_k; \theta_0)}$$

$$\text{et on pose } S_n = \sum_{k=1}^n Z_k.$$

Pour cela, il suffit de montrer que

- 1. $E_\theta(S_\nu) = E_\theta(\nu)E_\theta(Z_1)$,
- 2. $E_\theta(S_\nu) \simeq L(\theta) \log B + (1 - L(\theta)) \log A$.

5.5.1 Démonstration du premier point

$(S_n - nE_\theta(Z_1))_{n \geq 1}$ est une martingale relativement à la tribu engendrée par X_1, \dots, X_n (notée \mathcal{F}_n). En effet,

$$\begin{aligned} E_\theta(S_n - nE_\theta(Z_1) / \mathcal{F}_{n-1}) &= E_\theta(S_n / \mathcal{F}_{n-1}) - nE_\theta(Z_1) \\ E_\theta(S_n - nE_\theta(Z_1) / \mathcal{F}_{n-1}) &= S_{n-1} + E_\theta(Z_n / \mathcal{F}_{n-1}) - nE_\theta(Z_1) \\ E_\theta(S_n - nE_\theta(Z_1) / \mathcal{F}_{n-1}) &= S_{n-1} + E_\theta(Z_n) - nE_\theta(Z_1) \\ E_\theta(S_n - nE_\theta(Z_1) / \mathcal{F}_{n-1}) &= S_{n-1} - (n-1)E_\theta(Z_1) \end{aligned}$$

Corollaire du théorème de Wald : Soit $(X_n)_n$ une martingale et ν un temps d'arrêt, on a

$$E(X_\nu) = E(X_1) \quad .$$

Application : on obtient

$$\begin{aligned} E_\theta(S_\nu - \nu E_\theta(Z_1)) &= E_\theta(S_1 - 1 \times E_\theta(Z_1)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc

$$E_\theta(S_\nu) = E_\theta(\nu)E_\theta(Z_1).$$

5.5.2 Démonstration du deuxième point

On sait que S_ν prend approximativement deux valeurs $\log B$ et $\log A$ avec comme probabilités respectives $P_\theta(S_\nu \leq \log B)$ et $P_\theta(S_\nu \geq \log A)$. Donc il vient que

$$E_\theta(S_\nu) = P_\theta(S_\nu \leq \log B) \log B + P_\theta(S_\nu \geq \log A) \log A .$$

De plus, on a déjà vu que $P_\theta(S_\nu \leq \log B) \simeq L(\theta)$ et que $P_\theta(S_\nu \geq \log A) \simeq 1 - L(\theta)$. Ce qui entraîne le résultat voulu, à savoir

$$E_\theta(S_\nu) \simeq L(\theta) \log B + (1 - L(\theta)) \log A.$$

6 Applications au Problème du MTBO

6.1 Présentation des données

Les données liées à l'observation du fonctionnement de l'ILS se présentent comme une suite d'intervalles de temps que l'on note x_i , où x_i représente le temps séparant le $(i-1)^{\text{ème}}$ "outage" du $i^{\text{ème}}$.

n	x_n	$\sum_{i=1}^n x_i$
0	0	0
1	175	175
2	1505	1680
3	4488	6168
4	2382	8550
5	16	8566
6	1165	9731
7	244	9975
8	9240	19215
9	3	19218
10	6126	25344
11	4708	30052
12	3148	33200
13	3447	36647
14	5	36652
15	3554	40206
16	388	40594
17	7578	48172
18	5073	53245
19	215	53460
20	2622	56082
21	2802	58884

Afin de visualiser les données, on peut tracer la taille de l'échantillon (qui est en fait une variable aléatoire) en fonction du temps d'observation qui varie continûment. Chaque point d'inflexion de la courbe représente donc une interruption de fonctionnement du matériel. Il est ainsi aisé et intuitif de repérer les instruments défectueux. Nous verrons plus loin comment le test séquentiel s'adapte à ce graphique et à l'analyse intuitive que nous en faisons.

6.2 Modélisation

Deux approches sont possibles. Elles sont équivalentes et sont détaillées ci-après..

6.2.1 Modèle exponentiel.

De manière classique, on peut prendre comme variable aléatoire (cad comme données) les temps d'attente entre les outages, c'est à dire qu'à chaque fois que l'on observe un outage, on rajoute une donnée à l'échantillon correspondant au temps d'attente séparant les deux derniers outages. A chaque fois que cela arrive, la taille de l'échantillon considéré passe donc de n à $n+1$.

Soit x_i le temps séparant le $(i-1)^{ème}$ "outage" du $i^{ème}$. On considère

alors que les x_i suivent une loi exponentielle de paramètre $\left(\frac{1}{\theta}\right)$ de densité :

$$\frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} 1_{[x>0]} dx$$

6.2.2 Modèle Poissonien.

Pour ce modèle, on considère que l'on a n observations : r_i le nombre d'outages observés sur la durée t_i . Si l'on observe sur un temps total t , les données sont alors fournies par le nombre d'outages survenus pendant le temps t . On note r ce nombre. Le modèle adéquat est celui d'un processus de poisson, chaque variable R_t suivant une loi de Poisson de paramètre $\left(\frac{t}{\theta}\right)$. On a :

$$P_{\theta} [R_t = r] = \left(\frac{t}{\theta}\right)^r \left(\frac{e^{-\frac{t}{\theta}}}{r!}\right).$$

Ces deux modèles sont strictement équivalents, étant donné le fait que si l'on s'arrête au temps t correspondant au $i^{\text{ème}}$ "outage", on a l'égalité :

$$t = \sum_{i=1}^n x_i.$$

6.2.3 De la théorie à la pratique.

Comme on l'a vu précédemment, le test consiste à continuer de tester tant que :

$$B \leq L_n = \prod_{i=1}^n \frac{f(x_i, \theta_1)}{f(x_i, \theta_0)} \leq A,$$

avec :

$$A = \frac{(1 - \beta)(d + 1)}{2\alpha d} \quad \text{et} \quad B = \frac{\beta}{1 - \alpha}.$$

Dans le cadre du modèle exponentiel cela nous donne :

$$L_n = \prod_{i=1}^n \frac{\frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x_i}{\theta_1}}}{\frac{1}{\theta_0} e^{-\frac{x_i}{\theta_0}}} = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n \exp \left[- \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0} \right) \right].$$

Les données x_i représentant l'intervalle de temps entre deux outages, $\sum_{i=1}^n x_i = t$ représente le temps total d'observation de l'équipement. On continue de tester tant que :

$$\frac{\log B}{\log \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)} + \frac{\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)}{\log \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)} t < n < \frac{\log A}{\log \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)} + \frac{\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)}{\log \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)} t,$$

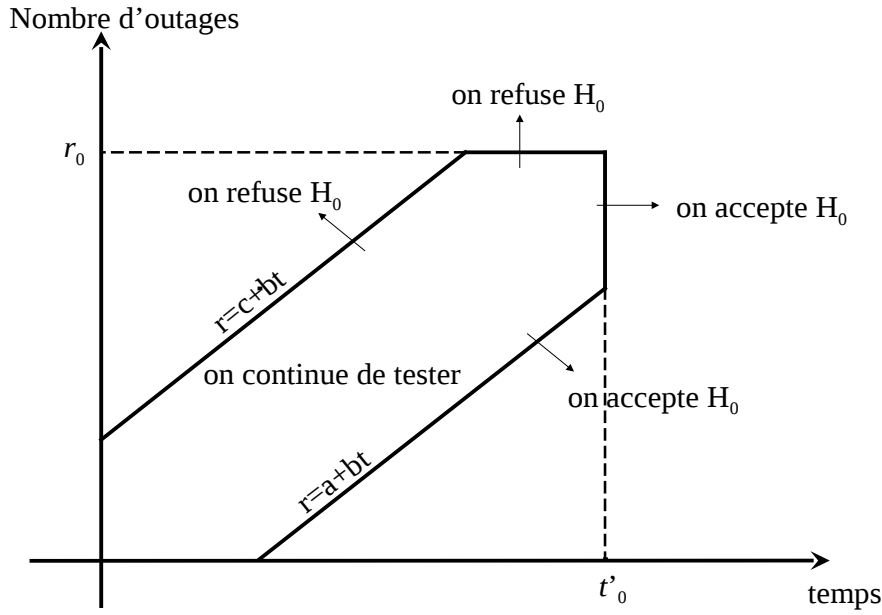


FIGURE 1 – Test séquentiel tronqué.

que l'on peut écrire sous forme d'équation de droites :

$$a + bt < n < c + bt.$$

On continue donc de tester tant que le nombre d'outages est entre ces deux bornes (dépendant du temps d'observation). Dans la pratique, on a déjà signalé que l'on utilisait les tests tronqués, il nous faut donc calculer la borne t_0 représentant le temps maximal de test ainsi que n_0 , la taille maximale d'échantillon. D'après Epstein & Sobel 1955, on prend pour n_0 , le plus petit entier n qui vérifie :

$$\frac{\chi_{(1-\alpha),2n}^2}{\chi_{\beta,2n}^2} > \frac{\theta_1}{\theta_0} = d$$

avec α, β et d fixés et $\chi_{s,t}^2$ représentant la loi du Chi-deux à deux paramètres s et t .

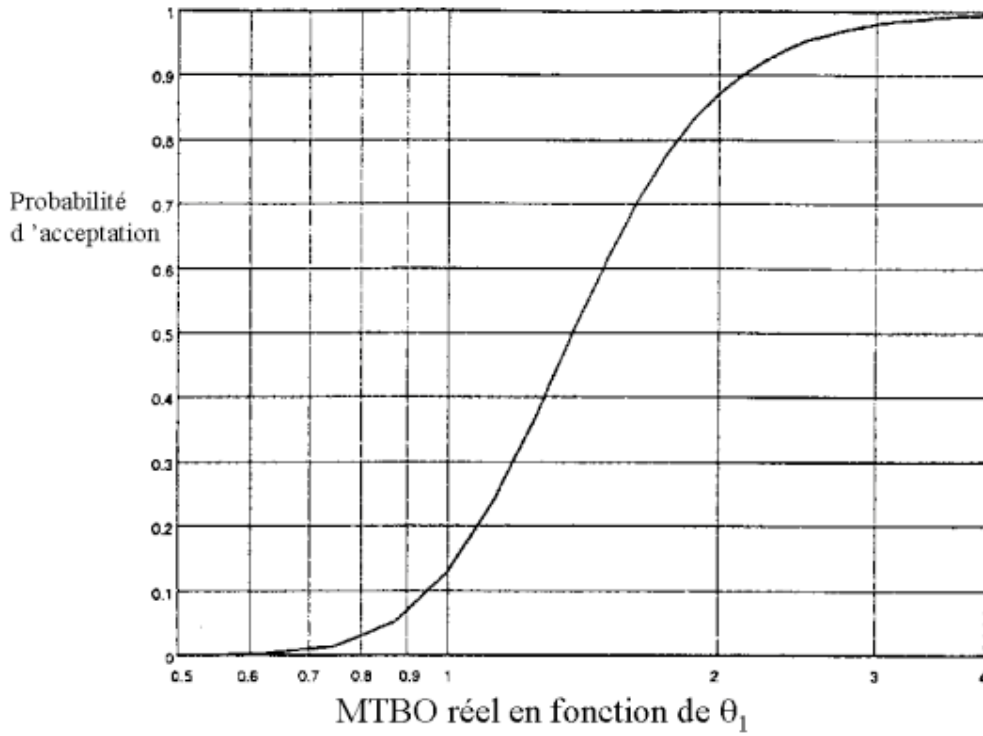
Une fois déterminé n_0 , on calcule T_0 :

$$T_0 = \theta_0 \frac{\chi_{(1-\alpha),2n_0}^2}{2}.$$

Le test séquentiel est donc complètement déterminé lorsque α, β et d sont fixés. On peut résumer la procédure par le graphique suivant :

Afin de compléter l'analyse de ce test, il faut obtenir graphiquement la fonction d'efficacité et le temps moyen pour prendre une décision (Expected Test Time). Rappelons que la fonction d'efficacité s'écrit

$$L(\theta) = P(\theta/\alpha, \beta, \theta_0, \theta_1) \simeq \frac{A^{h(\theta)} - 1}{A^{h(\theta)} - B^{h(\theta)}}.$$



Dans le cas exponentiel qui nous occupe, Wald montre qu'il existe une relation entre θ et $h(\theta)$:

$$\theta = \frac{\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{h(\theta)} - 1}{h(\theta) \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)}.$$

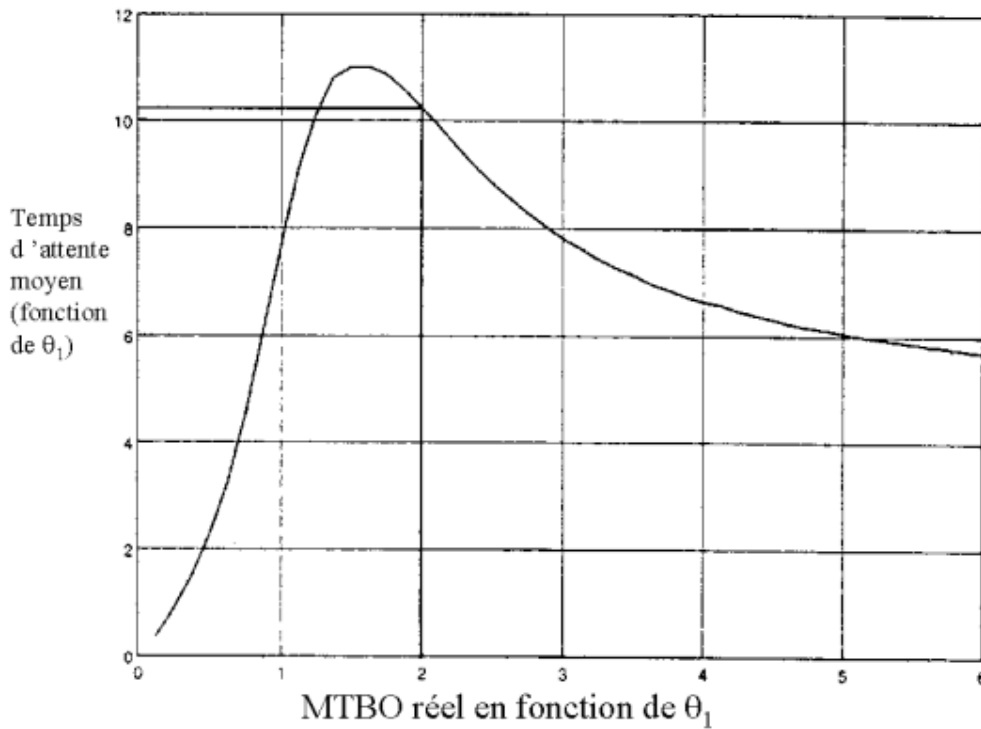
En faisant varier $h(\theta)$ sur les réels, et en considérant que $L(\theta_1) = \beta = P_{\theta_1}(\text{accepter } H_0)$ et que $L(\theta_0) = 1 - \alpha = P_{\theta_0}(\text{accepter } H_0)$ on peut obtenir le graphe de cette fonction. C'est ce qui est obtenu page 35 du rapport DERA (fig 2-5) avec la légende «**MTBO_{true} versus probability of acceptance**» (courbe $\theta, L(\theta)$). On fixe les valeurs de $d (= \frac{\theta_0}{\theta_1})$, de α et de β : nous obtenons ainsi les valeurs de A et B.

Une fois obtenu le graphe de $L(\theta)$, on obtient celui du temps moyen de décision qui s'exprime :

$$E_{\theta}(\nu) \simeq \frac{L(\theta) \log B + (1 - L(\theta)) \log A}{E_{\theta}(Z_1)}.$$

Nous avons vu plus haut que :

$$E_{\theta}(Z_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_0)} \right] f(x, \theta) dx.$$



En détaillant le calcul on a :

$$\begin{aligned}
 E_{\theta}(Z_1) &= \int_0^{+\infty} \left[\log\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right) - \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)x \right] \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx \\
 &= \log\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right) - \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right) E_{\theta}(X) \\
 &= \log\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right) - \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right) \theta.
 \end{aligned}$$

On est donc en mesure de calculer et de tracer la **fonction ASN** $(\theta, L(\theta))$ représentant le temps moyen nécessaire pour prendre une décision.

7 Possibilité d'amélioration

Comme nous l'avons indiqué à plusieurs reprises, le risque de première espèce noté α ou risque du producteur représente la probabilité de rejeter H_0 en faisant les calculs sous l'hypothèse H_0 (C'est à dire lorsqu'en réalité H_0 est vraie).

Pour une valeur $\theta_0 = 2\theta_1$ on considère que ce risque doit être fixé à 10%.

Le producteur peut envisager ce risque de la façon suivante : lorsque le vrai MTBO est égal à 2 fois la valeur minimale requise, on ne rejettera l'équipement, en moyenne, que dans 10% des cas. Ce risque ne semble pas pouvoir être remis en cause.

Le risque de deuxième espèce β ou risque du consommateur représente la probabilité de rejeter H_1 en faisant les calculs sous l'hypothèse H_1 (C'est-

à-dire lorsqu'en réalité H_1 est vraie). Si l'on considère que rejeter H_1 c'est accepter H_0 c'est le risque de considérer comme bon un équipement de qualité insuffisante.

La probabilité complémentaire $1 - \beta$ représente alors la probabilité d'accepter H_1 calculée sous l'hypothèse H_1 : c'est la probabilité de considérer comme défectueux un matériel qui l'est.

Il nous semble tout d'abord que les membres du groupe AWOOG, reprenant les conclusions du rapport DERA, font la confusion dans le document "All weather operations group (AWOG) co-ordination meeting" (paragraphe 2.3 et 3.3) entre cette probabilité $(1 - \beta) = 60\%$ et la probabilité que le vrai MTBO soit supérieur à 4000 heures sachant que l'on a accepté H_0 . D'autre part, le rapport signale que l'on peut moduler cette probabilité en fonction du moment de l'acceptation, par exemple après un an sans interruption (outage).

Nous avons demandé des explications à Mr Powe, sur le descriptif du calcul réalisé concernant la probabilité que le vrai MTBO soit supérieur à 4000 heures sachant que l'on a accepté H_0 . En effet, le rapport DERA daté de Janvier 2000 indique seulement page 70 :

"As an example, if a level 4 localizer is accepted after 12000 hours with one outage, it has been demonstrated that the true MTBO is greater than 4000 hours to a confidence level of 78% (fig 2-5)". la réponse est fournie en annexe. Nous n'avons pas été capables de comprendre cette réponse ni d'apporter une justification mathématique aux valeurs fournies. De plus les auteurs eux-mêmes ne semblent pas convaincus par leur calcul.

Nous pouvons effectuer le calcul de cette probabilité conditionnelle dans le cas d'un test classique (non séquentiel) pour constater que cette probabilité et la quantité $1 - \beta$ ne sont pas identiques en général.

		Etat de la nature (inconnu)	Etat de la nature (inconnu)
		H_0	H_1
Décision	H_0	$1 - \alpha$ (90%)	β (40%)
Décision	H_1	α (10%)	$1 - \beta$ (60%)

Supposons que l'on ait accepté H_0 et posons nous la question de savoir quelle est alors la probabilité que H_0 soit vraie. Il s'agit donc de la probabilité conditionnelle que H_0 soit vraie sachant que l'on a accepté H_0 .

Avec : $H_0 : \theta = \theta_0$ et $H_1 : \theta = \theta_1$

La formule Bayes nous donne alors :

$$P[\theta = \theta_0 / H_0 \text{ acceptée}] = \frac{P[H_0 \text{ acceptée} / \theta = \theta_0] \times P[\theta = \theta_0]}{D}$$

où $D = P[H_0 \text{ acceptée} / \theta = \theta_0] \cdot P[\theta = \theta_0] + P[H_0 \text{ acceptée} / \theta = \theta_1] \cdot P[\theta = \theta_1]$.

Pour faire ce calcul, il faut alors affecter des probabilités a priori sur H_0 et H_1 . En l'absence d'information, on peut considérer que $P[\theta = \theta_0] = P[\theta = \theta_1] = \frac{1}{2}$. On trouve alors :

$$P[\theta = \theta_0 \text{ } / H_0 \text{ acceptée}] = \frac{0.45}{0.65} = 0.69.$$

Ce calcul pourrait, bien sûr, être affiné pour entrer dans la problématique des tests séquentiels et aurait l'avantage de faire intervenir des informations a priori sur l'état de la nature (dans notre cas l'état de l'équipement), ce qui est l'objectif du travail.

En conclusion, il nous paraît possible de faire des calculs concernant la probabilité que le vrai MTBO soit supérieur à 4000 heures sachant que l'hypothèse H_0 a été acceptée. C'est cette valeur qui semble intéresser les experts. Cette probabilité peut être évaluée sous différentes conditions, en mettant des probabilités a priori sur le paramètre θ , ce qui revient à considérer θ comme une variable aléatoire. On rejoint ainsi l'approche bayésienne.

Ces probabilités a priori permettraient de tenir compte des informations disponibles sur θ .

8 Annexe

From: POWE Matthew D <Matthew.POWE@nats.co.uk>
 To: '''M. Bernard Garel''' <garel@len7.len7.enseeiht.fr>
 Subject: RE: Dera report
 Date: Mon, 8 Jan 2001 13:33:01 -0000
 X-Mailer: Internet Mail Service (5.5.2650.21)

Bernard,

Happy new year.

The DERA report doesn't describe the computation of the confidence percentages although they can be computed in a manner similar to the method described for computing the confidence limits. The confidence percentages (that the MTBO is greater than that required) when acceptance occurs after j outages can be computed as follows:

$\text{Confid.\%} = 100 \cdot (1 - \text{prob}(\text{accepting at or before } j \text{ outages assuming that the constant failure rate system's MTBO is equal to the requirement.}))$

In the example given, the probability of equipment with a true MTBO of 4000 hours being accepted at or before 12000 hours (using the accept boundary in Fig. 2-5) is $0.11 + 0.11 = 0.22$. The corresponding confidence statement that can be made if, for example, an acceptance decision was made with one outage after 12000 hours, is therefore:

It has been demonstrated that the true MTBO is greater than 4000 hours to a confidence level of $100 \cdot (1 - 0.22) = 78\%$.

$\backslash\text{textbf{}$

Although I have some doubts that a higher degree of confidence than the
 $\}$

$\backslash\text{textbf{}$ test's nominal 60% value should be stated

$\}$, the method does correctly reflect

that more trust can be placed in a system's reliability if an early acceptance is made.

Hope this helps

Regards
 Matthew